Tentamen Talen en Automaten, 11 april 2007

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.

Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor de correctheid van je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Opgave 1 (14 %). Beschouw de reguliere expressie $E = (((\mathbf{ab})^* + \mathbf{a}^*\mathbf{c})\mathbf{b})^+$ en de bijbehorende taal $L(E)$ over het alfabet $\{a, b, c, d\}$.
(a) Beschrijf en teken een ε-NFA die de taal $L(E)$ accepteert. Nummer de toestanden van deze automaat. Je hoeft de overgangstabel niet te geven, als de tekening maar duidelijk is.
(b) Construeer uit de ε-NFA van onderdeel (a) een DFA voor de taal L_1. Beschrijf deze DFA volledig met de overgangstabel (je hoeft hem niet te tekenen). Hoeveel bereikbare toestanden heeft hij? Geef aan wat de relatie is tussen de toestanden van deze DFA en die van de ε-NFA van onderdeel (a).

Opgave 2 (18 %).
(a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(b) De taal L_2 over het alfabet $\{a, b, c, d\}$ wordt gegeven door de contextvrije grammatica

$$S \rightarrow aSb \mid bSc \mid cSa \mid \varepsilon \ .$$

Bewijs dat de taal L_2 niet regulier is.

Opgave 3 (14 %). Beschouw de taal L_3 over het alfabet $\{a, b, c, d\}$ die voortgebracht wordt door de contextvrije grammatica G met de nonterminals S (startsymbool), A, B, C, D, en de productieregels

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \mid aB \mid Cb \\ A & \rightarrow & \varepsilon \mid cA \mid C \\ B & \rightarrow & bB \mid Da \\ C & \rightarrow & bAAc \mid cD \mid dS \ . \end{array}$$

(a) Leid uit grammatica G een nieuwe grammatica G' af met $L(G') = L(G)$ waarin alle terminal- en nonterminalsymbolen bereikbaar (reachable) en voortbrengend (generating) zijn. Motiveer je antwoord.
(b) Elimineer de ε-producties van G', dwz. leid uit G' een nieuwe grammatica G'' af, die voldoet aan $L(G'') = L(G) - \{\varepsilon\}$ en geen ε-producties heeft.

Z.O.Z.

Opgave 4 (14 %). Beschrijf een stapelautomaat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ met $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ die bij lege stapel precies de taal L_4 accepteert welke voortgebracht wordt door de grammatica

$$S \quad \rightarrow \quad 0S1 \mid 1S2 \mid 2S0 \mid \varepsilon \ .$$

Geef duidelijk aan wat de toestandsruimte Q, het stapelalfabet Γ en de overgangsfunctie δ zijn.

Opgave 5 (14 %). Ontwerp een meerbands Turing machine M met invoeralfabet $\Sigma = \{0, 1, p\}$, die twee natuurlijke getallen optelt. De getallen staan in binaire representatie op de eerste band, gescheiden door het symbool p. Het meest significante bit voor elk van de getallen staat links.

Bij correcte invoer moet de berekening eindigen in een accepterende toestand, terwijl dan de binaire representatie van de som van de twee getallen op de eerste band staat. Geef nauwkeurig aan hoeveel toestanden ($q \in Q$) je gebruikt en wat het betekent als de TM in een gegeven toestand is. Zorg dat duidelijk blijkt dat de TM aan zijn specificatie voldoet.

Opgave 6 (6 %). We beschouwen een taal L over een alfabet Σ.
(a) Wanneer is taal L *recursief opsombaar*? Geef de definitie.
(b) Wanneer is taal L *beslisbaar* (oftewel recursief)? Geef de definitie.

Opgave 7 (8 %). Stel dat de L over alfabet Σ recursief opsombaar is en niet beslisbaar. Beschouw de complementaire taal $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Is $\overline{L}$ recursief opsombaar? Geef een argumentatie.

Opgave 8 (12 %). De talen L_1 en L_0, beide over alfabet Σ, zijn recursief opsombaar. De taal L_1 **na** L_0 bestaat uit de strings $x \in \Sigma^*$, zodanig dat er een string $y \in L_0$ bestaat met de eigenschap $yx \in L_1$. Dus

$$(L_1 \textbf{ na } L_0) \quad = \quad \{x \in \Sigma^* \mid (\exists\, y \in L_0 : yx \in L_1)\} \ .$$

Laat zien dat de taal L_1 **na** L_0 recursief opsombaar is. Gebruik desgewenst een nondeterministische TM.